アキレスとカメ（前篇）

2013.01.01 対馬靖人

「アキレスとカメ」という有名なパラドックスがある。足の速いアキレスと歩みののろいカメとの競走の話だ。同じ位置からスタートすれば、英雄アキレスが勝つに決まっている。そこで、ハンデとして、英雄アキレスはカメの後方 1 メートルから走り始めることにする。もちろん同時スタートだ。果たしてアキレスはカメを追い抜くことができるだろうか。

このクイズの答、いやパラドックスの答は、カメの勝ちとしたいものだ。英雄アキレスが勝つのでは、わざわざここに取り上げるには及ばないからだ。カメの勝ちにすればこそ意外性があり面白いのだ。

だからといって、ウサギとカメの話のように、アキレスが「ここらで ちょっと 一ねむり」したので、カメの勝ちでは、子供だましだ。こうならないために、アキレスとカメの競走は、ゴールがない、いくら時間をかけてもよいデスマッチとしよう。こうすれば、「むこうの おやまの　ふもとまで」とゴールが決まっているウサギとカメの競走と違って、カメが勝つことはほとんど不可能だろう。なぜなら、少々眠ったとしても、アキレスはそれを挽回できるだろうから、カメが勝てるとは思えないからだ。

このような厳しい条件にすると、カメの勝ち目はなさそうである。しかし、何とかカメを応援して勝たせてあげたいと考えるのは、判官びいきだろうか。

ここで問題を整理しよう。アキレスはカメの後方 1 メートルから同時スタートする。カメは休むことなしに歩き続けるものとする。そして、アキレスも休むことなしに、カメよりも速いスピードで走り続けるとする。果たして、アキレスはカメを追い抜くことができるだろうか。さらにおまけの条件を付け加えて、カメのスピードは、常に毎秒 1 メートルをキープするとしよう。こうすれば問題が少しシンプルになるので考えやすくなる。いわば、カメの歩くスピードを基準となる座標系に組み込むようなものである。

この古代ギリシャのゼノンのパラドックスの答えは、期待通りに英雄アキレスは弱者のカメを追い抜くことができないとなっている。なぜかというと、次のような無限に陥るからだと言うのだ。

カメと同時にスタートするアキレスは、カメの後方 1 メートルの地点 p_0 からカメのスタート地点 p_1 まで進んだとき、カメはある程度先に進んでいる。この地点を p_2 としよう。

そこでアキレスはカメを追って、p_2 まで進む。しかし、その間カメは少し先に進んでいる。この地点を p_3 としよう。

そこでアキレスはカメを追って、p_3 まで進む。しかし、その間カメは少し先に進んでいる。この地点を p_4 としよう。

・・・

という具合に、p_1，p_2，p_3，p_4，… とカメのいた地点をアキレスは無限に追いかけることになる。

どのような無限か。次の歌詞をラップミュージック風にリズミカルに繰り返し歌っていただきたい。

アキレスは　カメをめがけて　ひとっ跳び
カメはのろりと　前で待つ　----------（前の行に戻る）

このラップミュージックは、無限に繰り返すのである。そして、これを何回繰り返そうと、容易に分かることだが、アキレスはカメよりも常に後にいる。だから、アキレスはカメを追い抜くことはできないというのだ。

この論理はちょっと見には正しいようにも思えるが、よく考えなくても詭弁に違いないと感じる。これまでの経験とあまりにもかけ離れているからだ。そして、そんなバカなと、強い疑いが湧いてくる。納得することなど到底できはしない。しかし、反論しようと思っても、なかなか難しい。そこがパラドックスたるゆえんである。だから、アキレスとカメの話は、古代ギリシャ時代にゼノンが唱えた数々のパラドックスの中で最も有名だ。

数学関係の本では

多くの数学関係の本では、このパラドックスを取り上げている。たとえば、ホフスタッター著「ゲーデル、エッシャー、バッハ」という興味深い話題満載の 700 ページを超える分厚い楽しい本は、アキレスとカメを主たる登場人物に仕立てて、彼らのダイアログ（論理的な対話）の形式で書かれている。その口調を真似すると次のような軽妙な調子だ。

アキレス　きみは無限を味方につけているから負けないというのかい。そういえば、きみの甲らの模様は無限大のマーク ∞ に似ているね。

亀　これかい？ これは無限大のマークよりも古い歴史をもつ由緒ある模様だよ。平面充填ができるハチの巣やこの甲らのマークは、進化のなせるわざといえるね。無限大のマークは、17 世紀にジョン・ウォリスという数学者が使い出してから広まった記号だから、最近のことさ。それに無限大のマークは無限とは別ものと捉えるべきだよ。だから、このマークの話はこれくらいにして、本題の「ぼくの戦略」に移ろう。確かに無限を味方にして、それにきみも味方につけて、ぼくは負けない形をつくろうとしていることは認めるよ。

この本には、もちろんアキレスとカメのパラドックについても書いてある。ただし、この論法が正しいかどうかを説明する代わりに、論理ではなく実験で確かめようと「位置について！用意！ドン！」という記述で序論を終えている。この論法には欠陥があり、論評に値しないというのだろうか。それとも、その後展開される数々のパラドックスのプレリュードだというのか。第 1 章では、早くも、推論と、推論についての推論と、推論についての推論についての推論と、推論についての推論についての推論についての推論と、… という具合に、アキレスとカメが数ヵ月にわたって推論に関する議論を続ける話、というか推論を完璧にするための手続きを実施し続ける話が現れる。

無限退行はこのあたりで切り上げ、別の数学関係の本に移ろう。分母が倍々ゲームを続ける次の無限等比級数は、先に行けば行くほど急峻に小さくなるので、合計値が無限ではなく有限であることを根拠にして、このパラドックスを解明しようとするものもある。

$$1 + 1/2 + 1/4 + 1/8 + 1/16 + 1/32 + 1/64 + 1/128 + 1/256 + \cdots$$

この数式は、アキレスのスピードが毎秒 2 メートルでカメのスピードが毎秒 1 メートルとして、カメに追いつくまでにアキレスが走る距離を示している。このスピードの場合に、パラドックスの記述に忠実に従って、距離の計算をする数式が上述のものである。すなわち、アキレスのスタート地点 p_0 から p_1 までの距離，p_1 から p_2 までの距離，p_2 から p_3 までの距離，… というように各距離を求めて、すべて足し合わせる。つまり、無限個の距離の足し算である。

この計算結果は、よく知られているように無限ではなく **2** に収束するので、アキレスが **2** メートル走ってカメに追いつき、その後はアキレスがカメの先を進むことになるというのだ。このパラドックスには無限が現れるので難しいが、無限回の計算をすることでパラドックスを打ち砕くことができるとのこと。

しかし、これでは腑に落ない。なぜアキレスがカメを追い抜いてカメの先に出るのかについて説明がない。吉田洋一著「零の発見」といういわば古典的な本にもアキレスとカメの話が取り上げられている。そして、無限回の計算（無限級数）による考え方をすればよいと主張する数学者がいるのであるが、吉田洋一氏は「不幸にして、私はまだその意味がよく呑み込めるほどの楽天家にはなれないでいる」と書いている。

さらに別の数学関係の本では、アキレスのスピードが毎秒 2 メートルでカメのスピードが毎秒 1 メートルであれば、アキレスとカメの差は、毎秒（2 - 1）メートルずつ（毎秒 1 メートルずつ）縮まるので、スタート時点の 1 メートルの差が 0 になるまでかかる時間は、距離をスピードで割った 1/(2 - 1) 秒後である。すなわち 1 秒後だと考えられる。これは、上述の計算結果と同じだ。したがって、わざわざ無限を登場させなくても、アキレスとカメのパラドックスは解けると説明したりする。しかし、これも腑に落ない。これはパラドックスの追いかけっこの論法を無視して、**別の方法**で問題を解いたものだ。これではパラドックスを解明したことにならない。

いずれにしても、アキレスとカメのパラドックスは、最初からおかしな話であり、こんな詐欺まがいの話にひっかかってはいけないと思う人が多いのではないだろうか。これは詭弁であり、足の速いアキレスはカメを追い抜くに決まっていると考えるのが健全のように思えるのである。果たして、アキレスはカメを追い抜けないというのは詭弁だと考えるべきなのだろうか。

果たして詭弁か

もしも詭弁以外の何物でもないのであって、結局のところ足の速いアキレスの勝ちだと結論付けられてしまうようであれば、カメは負けないなどと 2000 年以上も人を惑わしてきたゼノンの責任を追及したくなる。このパラドックスは、そんな薄っぺらなものなのだろうか。

藤田博司著「魅了する無限」技術評論社 には、このアキレスとカメの話が 14 ページにわたって解説してある。サブタイトルに「アキレスは本当にカメに追いついたのか」とあることからもうかがわれるように、このパラドックスを重要なテーマの一つとして取り上げている。

ただし、著者の藤田博司氏は、このパラドックスを題材として、実数の連続性について述べようと目論んだようだ。したがって、連続性に関係のない事柄は、さらっと簡単に述べるに留まっている。そんな中に、見過ごせない重要な記述がある。アキレスがカメに追いつかない場合が本当にあるというのだ。もちろん、先に整理したとおりに、アキレスはカメよりも速いスピードで走り続けるデスマッチであるなどの条件を満たしているにもかかわらず、追いつかないのである。

なぜか藤田博司氏は詳しく説明していないのだが、この重大な事実についてスタートからの経過時間をベースに述べよう。これが一番分かりやすい。

アキレスはそのスタート地点 p_0 からカメのスタート地点 p_1 まで **1/2** 秒かけて走り、次の地点 p_2 まで **1/3** 秒かけて走り、次の地点 p_3 まで **1/4** 秒かけて走り、次の地点 p_4 まで **1/5** 秒かけて走り、… というように **1/2, 1/3, 1/4, 1/5,** … と時間をかけた場合は、アキレスはカメに追いつかないというのである。アキレスとカメのパラドックスは、詭弁ではなく、まぎれもない真実だというのであろうか。

詭弁ではなく数学的な真実か

アキレスとカメのレースを“**追いかけサイクル**”という言葉を使って詳しく調べると、数学的な真実かどうか分かってくる。

最初の**第 1 追いかけサイクル**は、地点 p_0 から p_1 まで **1/2** 秒かけたアキレスの走りだ。当初の差の 1 メートルを 1/2 秒で走るのだから、毎秒 2 メートルのスピードだ。なお、この間カメは 1/2 メートルだけ前に出る。カメは毎秒 1 メートルだから 1/2 秒で 1/2 メートル進むのである。

次の**第 2 追いかけサイクル**は、p_1 から p_2 まで **1/3** 秒かけたアキレスの走りだ。ここでは 1/2 メートルの差を 1/3 秒で走るのだから、毎秒 3/2 メートルのスピードだ。なお、この間カメは 1/3 メートルだけ前に出る。カメは毎秒 1 メートルだから 1/3 秒で 1/3 メートル進むのである。

次の**第 3 追いかけサイクル**は、p_2 から p_3 まで **1/4** 秒かけたアキレスの走りだ。ここでは 1/3 メートルの差を 1/4 秒で走るのだから、毎秒 4/3 メートルのスピードだ。なお、この間カメは 1/4 メートルだけ前に出る。カメは毎秒 1 メートルだから 1/4 秒で 1/4 メートル進むのである。

という具合に、各追いかけサイクルについて、アキレスのスピードを計算していくと、次の表が得られる。

追いかけサイクルの番号	追いかけサイクルの時間（秒）	アキレスのスピード（メートル/秒）	アキレスの進む距離（メートル）	カメの進む距離（メートル）
1	1/2	2/1	1	1/2
2	1/3	3/2	1/2	1/3
3	1/4	4/3	1/3	1/4
4	1/5	5/4	1/4	1/5
5	1/6	6/5	1/5	1/6
6	1/7	7/6	1/6	1/7
7	1/8	8/7	1/7	1/8
8	1/9	9/8	1/8	1/9
…	…	…	…	…

この表から、アキレスは、常にカメよりも速いスピードで走ることが分かる。なぜなら、アキレスのスピードを表わす分数を見ると、分子が分母よりも大きいので 1 より大、すなわちカメの毎秒 1 メートルよりも大きいからだ。ただし、アキレスは徐々にペースダウンする。これは、アキレスが疲れたためであろうか、それとも余裕の現れであろうか。あるいは、カメはアキレスを味方につけて、判官びいきの大歌舞伎ショーを繰り広げているのだろうか。いずれにしても、アキレスは、ウサギと違って眠ったりしないから、カメのスピードより遅くなることはないし、同じスピードになることもない。常にカメよりも速いのである。

そして、この追いかけサイクルは無限に続くので、アキレスはカメに追いつかないというのが、ゼノンのパラドックスの論法である。果たしてそうなのだろうか。無限回の足し算の答えが有限のこともあるので、即断は禁物である。そこで、カメ（Tortoise）が進んだ距離 **DT** またはスタート時点からの経過時間 **T** を実際に計算してみよう。どちらも、前述の表から分かることだが、次の無限個の数の足し算をすればよい。これを**カメ級数**呼ぶことにする。カメ級数の値がカメの進んだ距離 **DT** である。

$$\mathbf{DT} = 1/2 + 1/3 + 1/4 + 1/5 + 1/6 + 1/7 + 1/8 + 1/9 + 1/10 + 1/11 + \cdots$$

なお、念のため述べると、カメは毎秒 1 メートルのスピードをキープしているので、カメが歩いた秒数 **T** とメートル数 **DT** は、一致するのである。

同様に、アキレスが進んだ距離 **DA** を実際に計算するには、次の無限個の数の足し算をすればよい。これを**アキレス級数 DA** と呼ぶことにする。アキレス級数の値がアキレスの進んだ距離 **DA** である。

$$\mathbf{DA} = 1 + 1/2 + 1/3 + 1/4 + 1/5 + 1/6 + 1/7 + 1/8 + 1/9 + 1/10 + \cdots$$

このアキレス級数は、実はよく知られている**調和級数**に他ならない。この級数の名前は、ハーモニーを奏でるハープなどの弦楽器の倍音の波長に由来する。

調和級数は、昔から研究されていて、少なくとも 17 世紀までに正の無限大に発散することが知られるようになった。つまり、アキレス級数は発散するとのことだが、これは何を意味するのだろうか。アキレスとカメの競走に当てはめると、いま一つはっきりしない。そもそも「正の無限大に発散する」とは、数学の解析学と呼ばれる分野では詳しく取り扱っていないもののようでもあり、「対象外」だと言われて“のけもの”にされたような疎外感を与えられる。あるいは批判的な言い方をすると、「正の無限大に発散する」とは思考停止を宣言する言葉なのかもしれない。

ここでは、「無限大」などを鵜呑みにせずに、実際にこのアキレス級数の値がどれほど大きいものかを詳しく調べてみることにする。

アキレス級数の計算にあたっては、各項をグループ分けすると計算結果の見通しがよくなる。すなわち、分母の桁数が 1 桁の項、2 桁の項、3 桁の項、…というように、グループ分けする。そして、各グループの小計を見積もってから、それらの合計値を求めるのである。

1 桁グループの小計 = 1 + 1/2 + 1/3 + 1/4 + 1/5 + 1/6 + 1/7 + 1/8 + 1/9
2 桁グループの小計 = 1/10 + 1/11 + 1/12 + … + 1/98 + 1/99
3 桁グループの小計 = 1/100 + 1/101 + 1/102 + … + 1/998 + 1/999
・・・

1 桁グループは全部で 9 項あり、その和は、9 × 1/9 よりも大きい。
2 桁グループは全部で 90 項あり、その和は、90 × 1/99 よりも大きい。
3 桁グループは全部で 900 項あり、その和は、900 × 1/999 よりも大きい。
・・・
各グループの小計を荒っぽく見積もると、どれも 1 よりも大きいといえる。

これらのことから、上述のアキレス級数の値（和）は、次の数式の値よりも大きいことが分かる。次の数式の値を下限として、これよりも大きいのである。

1 × 桁グループの個数　　（下限の見積値）

同様に、荒っぽく上限を見積もると、上述のアキレス級数の値（和）は、次の数式の値よりも小さいことが分かる。

9 × 桁グループの個数　　（上限の見積値）

実際にアキレス級数の部分和を計算してみると、次の表のとおりであり、上述の上限下限の見積値の範囲に収まっていることが確認できる。

桁番号	部分和の範囲	下限	アキレス級数の部分和	上限
1	1/1 から 1/9 まで	1	2.828968…	9
2	1/1 から 1/99 まで	2	5.177377…	18
3	1/1 から 1/999 まで	3	7.484470…	27
4	1/1 から 1/9999 まで	4	9.787506…	36
5	1/1 から 1/99999 まで	5	12.090136…	45
6	1/1 から 1/999999 まで	6	14.392725…	54
7	1/1 から 1/9999999 まで	7	16.695311…	63
8	1/1 から 1/99999999 まで	8	18.997896…	72
9	1/1 から 1/999999999 まで	9	21.300481…	81

離散的な値 1/1 + 1/2 + 1/3 + … + 1/n の合計が、1/x という連続関数の積分（対数関数）で近似できることは、想像に難くない。

実際に、アキレス級数、すなわち調和級数の部分和は、対数関数（Log）で近似できることが知られている。この近似式を使うと、第 n 追いかけサイクルまでのアキレス級数の部分和 DA_n は、次のとおりである。

$$DA_n \fallingdotseq \mathrm{Log}_{10}\, n \,/\, \mathrm{Log}_{10}\, e + \gamma$$

（ただし e は自然対数の底 ＝ 2.718281… 、
γ はオイラー・マスケローニ定数 ＝ 0.577215… ）

この近似式を **n**（追いかけサイクル）ではなく、前述の表の桁番号 **k**（追いかけサイクルの桁グループの番号）で表わすと、アキレス級数の部分和 DA_k は、次のようになる。

$$DA_k \fallingdotseq k \,/\, \mathrm{Log}_{10}\, e + \gamma$$
$$\fallingdotseq 2.302585\, k + 0.577215$$

（ここでは、$\mathrm{Log}_{10}\, n$ を k で近似している）

たとえば、5 桁までのアキレス級数の部分和 DA_5 を求めると、次のとおりであり、前述の表の値 12.090136… とほぼ等しい。

$$DA_5 \fallingdotseq 2.302585 \times 5 + 0.577215 = 12.090140$$

このように計算してくると、アキレス級数の値は、追いかけサイクル番号の桁数（追いかけサイクル桁番号）の数倍の大きさ（約 2.3 倍）であることが分かる。やはり詳しく計算してみるものである。「正の無限大に発散する」と切って捨てるようなことをしたのでは、思考停止で分からなかったことである。

ここで、追いかけサイクル番号は、自然数であり、1, 2, 3, … と無限に大きくなることを思い出そう。追いかけサイクルは無限回に及ぶのだから、アキレスはカメに追いつかないというのが、ゼノンの主張である。ただし、無限回の足し算の答えが有限のこともあるので、アキレスの進む距離がどれほどなのかと調べてみたのが上述の結果である。

この結果、アキレスの進む距離は、追いかけサイクル桁番号の数倍の大きさ（約 2.3 倍）であることが分かった。つまり、追いかけサイクルを重ねれば重ねるほどアキレスの進む距離は増えていくのである。だから「正の無限大に発散する」という表現も悪くないかもしれない。しかし、カメが述べたように、無限大と無限とは異なるので、しっかりと計算した方がよいのである。

ところで、自然数の桁数の集合は、無限ではなく有限だと考えられている。

数学の集合論という分野には、自然数の集合が一番小さい本格的な無限であるとの証明がある。そして、自然数の桁数の集合の“べき集合”が自然数だと考えると、自然数の桁数の集合は自然数の集合より小さい。

ただし、自然数の桁数の集合が有限だとはいっても、桁数の上限を明確にいえないほど大きい。したがって、アキレスが地球を一周するほどの距離である 4 万キロメートル進んでもカメに追いつけないし、地球を何周してもそれが有限回の範囲では追いつけないことになる。たとえ周回距離の合計が 100 万光年に達するような天文学的な距離を進んでも、100 万光年は有限の範囲だから、アキレスはなおカメに追いつけないのである。

ちなみに、ここで確認の意味で、アキレスが進んだ距離 **DA** とカメが進んだ距離 **DT** との差 **D**（＝ **DA** － **DT**）を求めてみよう。この進んだ距離の差 **D** が 1 になれば、当初の距離の差の分だけアキレスが長い距離を進んだので、アキレスはカメに追いついたことを意味する。そして、この進んだ距離の差 **D** が 1 より大きくなればアキレスはカメを追い抜いたことを意味する。ここでは、第 n 追いかけサイクルが終わった時点での進んだ距離の差 D_n を求める。

$$
\begin{aligned}
D_n &= DA_n - DT_n \\
&= \{ 1 + 1/2 + 1/3 + 1/4 + 1/5 + \cdots + 1/n \} \\
&\qquad - \{ 1/2 + 1/3 + 1/4 + 1/5 + \cdots + 1/n + 1/(n+1) \} \\
&= 1 - 1/(n+1)
\end{aligned}
$$

この値（$DA_n - DT_n$）は、追いかけサイクルを繰り返して n が大きくなれば 1 に近づくので、アキレスはカメに近づくことが分かる。しかし、1 になるとはいい難い。ましてや、1 より大きくなることは考えられない。

ゼノンのパラドックスの論法は、ゆるぎないように思える。

ここで、疑問が生じるかもしれない。もしも、アキレスの進む距離が無限に及んだらどうなるのであろうか。これについては、もっと無限について深く調べた後に考察することとして、とりあえずここでは、アキレスの進む距離が有限の範囲では（つまり少なくとも何キロメートルとか何光年とか数値をいえるような範囲では）カメに追いつけないと理解しておこう。

このような数学的な結果を得ると、アキレスとカメのパラドックスは、とても詭弁だとは言えなくなる。そして、ゼノンは後光がさすような偉大な哲人に見えてくる。ひょっとすると、ゼノンは後世の我々に次のような問題を投げかたのかもしれない。

問題: アキレスとカメの競走は、どういう場合にアキレスが勝つという常識的な結果になり、どういう場合にパラドックスが示すとおりにアキレスはカメに追いつけないのか、その条件を明らかにせよ。

この問題は読者の方々に解いていただくこととして、これまで分かったことをまとめておこう。

各**追いかけサイクル**に、アキレスが 1/2, 1/4, 1/8, 1/16, … という時間（秒数）をかけてカメを追いかけた場合には、2 秒後にカメに追いつくように見える。しかし、アキレスが 1/2, 1/3, 1/4, 1/5, … という時間（秒数）をかけてカメを追いかけた場合には、カメに近づいていくが、少なくとも有限の時間内にカメに追いつくことはできない。

そして、アキレスが 1, 1, 1, 1, … という時間（秒数）をかけてカメを追いかけた場合には、カメのスピードと同じであるから、1 メートルの差は縮まることがなく、永遠に追いつくことはない。無限の悠久の時間をもてあそぶかのように**追いかけサイクル**を繰り返すことになる。これは明らかであろう。

（つづく）

実は、この後、北野監督もびっくり、とんでもない**どんでん返し**が待ちうけているので、後編をお楽しみに。アキレスとカメのパラドックスは、一筋縄で解けるような代物ではないのであるが、古代ギリシャに思いをはせると、…

Copyright © 2012-2013 by Y. Tsushima. All Rights Reserved.